Zusammenfassung SysTheo II

Wahrscheinlichkeit:

Begriffe: Elementarereignis ξ : Erg. eines (Zufalls-) Experiments

Ereignis A: $\in \Omega$, bel. Untermenge aus Ω
Stichprobenraum

Mengen:

$A \cup \emptyset = A$ | $A \cap \emptyset = \emptyset$ | $A \cup B = B \cup A$ | $A \cap B = B \cap A$
$A \cup \Omega = \Omega$ | $A \cap \Omega = A$ | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cup A = A$ | $A \cap A = A$ | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup \bar{A} = \Omega$ | $A \cap \bar{A} = \emptyset$ | $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ | $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

W'keit:

klass. Def.: über Häufigkeit $= \frac{n_A}{n}$ $\rightarrow Wk_A = \lim_{n \to \infty} n_A / n$

mod. Def.:
*) $P(A) \geq 0$
*) $P(\Omega) = 1$
*) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (wenn $A \cap B = \emptyset$)

Eigenschaften:
*) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
*) $P(\emptyset) = 0$
*) $0 \leq P(A) \leq 1$
*) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
*) Gleichverteilung: sind alle $\xi \in \Omega$ gleichwahrscheinlich, dann gilt:
$P(A) = |A| / |\Omega|$

Bed. W'keit: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ für $P(B) \neq 0$ ... W'keit für A unter Bed. B
($\hat{=}$ Einschr. d. Grundmenge)

*) alle Axiome gelten
*) $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$
*) $P(A|B) = P(B|A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$ ... Bayes-Formel

*) für $B \subset A$ gilt: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1$

*) totale W'keit: für 1> $B_i \cap B_j = \emptyset \ \forall i \neq j$
2> $A \subset (\bigcup B_i)$

gilt: $P(A) = \sum_i P(A|B_i) \cdot P(B_i)$

*) stochast. Unabh.: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$\hookrightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$
$\hookrightarrow$ $\bar{A}$ und B; A und $\bar{B}$; $\bar{A}$ und $\bar{B}$ } stoch. unabh.

Zufallsvariable

Begriffe: *) ZV $X = X(\xi)$, $\xi \in \Omega \rightarrow X(\xi) \in \mathbb{R}$

*) x: Zahl, Realisierung von X

*) $\{X \leq x\} := \{\xi \mid X(\xi) \leq x\}$: Ereignis

E1> $\{X \leq -\infty\} = \emptyset$ E2> $\{X \leq \infty\} = \Omega$

Verteilungs- u. Dichtefkt:

$\boxed{\text{Verteilungsfkt}}$ $F_X(x) = P(X \leq x)$, $\mathbb{R} \to [0,1]$

*) $F_X(-\infty) = 0$
*) $F_X(\infty) = 1$
*) $F_X(x)$ monoton steigend $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ für $x_1 < x_2$
*) $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$
*) $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x)$
*) $F_X(x)$ von rechts stetig

Typen von ZV: *) kontinuierliche ZV $\to$ $F_X(x)$ überall stetig $\to$ $< \# \leq$

*) diskrete ZV $\to$ $F_X(x)$ Treppenfkt.

$|\Omega| < \infty$ $\to$ diskrete ZV
$|\Omega| = \infty$ $\to$ kont. ZV oder gem. Typ

$\boxed{\text{Dichtefkt.}}$ $f_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$

mit $f_Z(z) = F_{XY}(z,z)$

$\hookrightarrow f_Z(z) = \dfrac{d}{dz} F_{XY}(z,z)$

$= \dfrac{d}{dx} F_{XY}(x,z)\Big|_{x=z} + \dfrac{d}{dy} F_{XY}(z,y)\Big|_{y=z}$

*) kont. ZV $\to$ $f_X(x)$ überall endlich
*) diskr. ZV $\to$ $f_X(x) = \sum_i p_i \, \delta(x - x_i)$, $p_i = P(X = x_i)$

*) $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1$

*) $f_X(x) \geq 0 \;\; \forall x$

*) $\int_{-\infty}^{x} f_X(z)\,dz = F_X(x)$

*) $P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx$

$P(x < X \leq x + \Delta x) \approx f_X(x) \cdot \Delta x$ für $\Delta x \ll 1$

Symmetr. Dichte $[f_X(x) = f_X(-x)]$:

*) $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$

*) $P(|x| \leq X) = 1 - 2F_X(-x) = 2F_X(x) - 1$

*) $P(|x| > X) = 2 - 2F_X(x)$

Bedingte Vert.- & Dichtefkt: $F_X(x|B) = P(X \leq x | B) = \dfrac{P(X \leq x \cap B)}{P(B)} \;\hat{=}\; \dfrac{P(X \leq x, B)}{P(B}$

$f_X(x|B) = \dfrac{dF_X(x|B)}{dx}$

*) alle Eig. von $\uparrow$
*) totale W'keit: für 1) $B_i \cap B_j = \emptyset \;\forall i \neq j$ gilt: $F_X(x) = \sum_i F_X(x|B_i) \cdot P(B_i)$
2) $\bigcup_i B_i = \Omega$

*) Beyes-Formel: *) $F_X(x|B) = P(B | X \leq x) \cdot \dfrac{F_X(x)}{P(B)}$

*) $f_X(x|B) = P(B | X = x) \cdot \dfrac{f_X(x)}{P(B)}$

Funktion einer ZV $\quad Y(\xi) = g(X(\xi))$

*) direkte Methode: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \in D_y) = \int_{D_y} f_X(x)dx$

*) syst. Methode: 1> $\forall y = g(x)$ löse nach $x \rightarrow y = g(x_i)$ bzw. $x_i = g^{-1}(y)$

2> $f_Y(y) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} f_X(x)\Big|_{x_i}$

Momente: $\boxed{\text{Erwartungswert}}$ 1. Moment $\quad \mu = E(X) := \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\,dx \quad \left(= \frac{\int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx}{\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx} \triangleq \text{Schwerpunkt} \right)$

(für X diskret: $\mu = \sum_i p_i x_i$

*) unter Bed. B: $\quad E(X|B) = \int x f_X(x|B)\,dx \quad (\sum_i x_i P(X = x_i|B)$

*) einer Fkt. v. X: $\quad E(\underbrace{g(X)}_{Y}) = E(Y) = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)dy = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_X(x)dx$

$\boxed{\text{Standardabweichung}}$ $\boxed{\text{(Varianz)}}$ 2. Moment $\quad \sigma^2 := E((X-\mu)^2) = \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 f_X(x)dx$ ... Varianz

σ ... Standardabweichung $= \sqrt{var(X)}$

allgemeiner: $\quad$ n-tes Moment: $m_n = E(X^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n f_X(x)dx$

n-tes zentrales Moment: $\gamma_n = E((X-\mu)^n) = \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^n f_X(x)dx$

Eigenschaften von E(): $\quad$ *) linear: $E(\sum_i c_i g_i(X)) = \sum c_i E(g_i(X))$

*) für 1> c deterministisch 2> $f_X(x) = \delta(x-c)$ $\rightarrow E(c) = c$

Zusammenhang $m_n \Leftrightarrow \gamma_n$: $\quad \underset{\text{Gesamtlst.}}{E(X^2)} = \underset{\text{Wechsellst.}}{\sigma^2} + \underset{\text{Gleichanteil}}{\mu^2}$ bzw.

$\downarrow$

$var = \sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2$ $\quad$ allg.: $E(X^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \gamma_k \mu^{n-k}$

Tschebyscheff-Ungleichung: $\quad P(|X-\mu| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} var(X)$

benötigt $\quad f_X(x) \quad \sigma^2$

Momentenerzeugende Fkt. & charakt. Fkt.

momentenerzeugende Fkt.: $\quad \Phi_X(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{sx} f_X(x)dx \quad s \in \mathbb{C}$

(diskret: $\Phi_X(s) = \sum_i p_i e^{sx_i}$)

charakt. Fkt.: $\quad \Phi_X(s)\big|_{s=j\omega} = \Phi_X(j\omega) = E(e^{j\omega X}) \quad \omega \in \mathbb{R}$

*) $f_X(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} \Phi_X(-s)$

*) $f_X(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \Phi_X(-j\omega)$

*) $E(X^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n f_X(x)\,dx = \frac{\partial^n \Phi_X(s)}{ds^n}\Big|_{s=0}$

Mehrere ZV:

Zwei ZV: bivariate Vert.-Fkt.: $F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(\{\xi \mid X(\xi) \leq x \cap Y(\xi) \leq y\})$

" Dichte-Fkt.: $f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y)$

Eigenschaften F_{XY}:

*) $F_{XY}(x,-\infty) = F_{XY}(-\infty,y) = 0$

*) $F_{XY}(\infty,\infty) = 1$

*) monoton steigend + von rechts stetig (in x & y)

*) $P(x_1 < X \leq x_2, Y \leq y) = F_{XY}(x_2,y) - F_{XY}(x_1,y)$
(analog mit Y)

*) $P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = F_{XY}(x_2,y_2) - F_{XY}(x_1,y_2) - F_{XY}(x_2,y_1) + F_{XY}(x_1,y_1)$

" f_{XY}:

*) $f_{XY}(x,y) \geq 0$

*) $F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(z,w)\,dz\,dw$

*) $\iint_{\mathbb{R}} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1$

*) $P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$

Marginalverteilungsfkt: $F_X(x) = F_{XY}(x,\infty)$ bzw. $F_Y(y) = F_{XY}(\infty,y)$

Marginaldichtefkt.: $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x,y)\,dy$ bzw. $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x,y)\,dx$

Zufallsvektor: "Begriffserweiterung": $\underline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N : \xi \in \Omega \rightarrow \underline{X}(\xi) = \begin{bmatrix} X_1(\xi) \\ \vdots \\ X_N(\xi) \end{bmatrix}$

$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = F_{X_1 \dots X_N}(x_1,\dots,x_N) = P(\underline{X}(\xi) \leq \underline{x})$

$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{\partial^N}{\partial x_1 \dots \partial x_N} F_{\underline{X}}(\underline{x})$

Bedingte ...: $F_{\underline{X}}(\underline{x} \mid B) = \frac{P(\underline{X} \leq \underline{x} \cap B)}{P(B)}$

(mit $B = \{\underline{Y} \leq \underline{y}\}$: $F_{\underline{X}}(\underline{x} \mid \underline{Y} \leq \underline{y}) = \frac{F_{\underline{X}\underline{Y}}(\underline{x},\underline{y})}{F_{\underline{Y}}(\underline{y})}$

$f_{\underline{X}}(\underline{x} \mid B) = \frac{\partial^N}{\partial x_1 \dots \partial x_N} F_{\underline{X}}(\underline{x} \mid B)$

(mit " : $f_{\underline{X}}(\underline{x} \mid \underline{Y} \leq \underline{y}) = \frac{f_{\underline{X}\underline{Y}}(\underline{x},\underline{y})}{F_{\underline{Y}}(\underline{y})}$

Stoch. Unabhängig: $F_{\underline{X}\underline{Y}}(\underline{x},\underline{y}) = F_{\underline{X}}(\underline{x}) \cdot F_{\underline{Y}}(\underline{y})$ (analog $f_{\underline{X}\underline{Y}}$)

$\rightarrow$ *) $F_{\underline{X}}(\underline{x}|\underline{y}) = f_{\underline{X}}(\underline{x})$

*) $g(\underline{X})$ und $h(\underline{Y})$ auch unabh.

Fkt. von ZV: Zwei ZV: direkte Methode: ggg.: $F_{XY}(x,y)$ bzw. f_{XY}

$z = g(X)$, $w = h(Y)$ (*)

$\rightarrow F_{ZW}(z,w) = \iint_{D_{ZW}} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$

syst. Methode: 1> für jedes Paar (z,w) löse (*) nach x_i, y_i
(nur f. kont. ZV)

2> $J(x,y) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix}$ .... Jacobi-Det.

3> $f_{ZW}(z,w) = \sum_i \frac{1}{|J(x_i,y_i)|} f_{XY}(x_i,y_i)$

$f_{XS}(x,s) = f_X(x|S=s) \cdot f_S(s)$

$f_S(s|X=x) = f_X(x|s) \frac{f_S(s)}{f_X(x)}$

Fkt. von 2 ZV: $Z = g(X,Y)$

*) Def. neue ZV $W = Y$

$\hookrightarrow f_{ZW}(z,w)$

*) $f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_{ZW}(z,w)\,dw$

Mehrere Fkt. v. mehreren ZV: ggg.: $\underline{Y} = \underline{g}(\underline{X})$

$\underline{f_Y}$: 1> $M = N$: $f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \sum \frac{1}{|J(\underline{x}_i)|} f_{\underline{X}}(\underline{x}_i)$

für $\underline{y} = \underline{g}(\underline{x}_i)$

2> $M < N$: Hilfsvariablen def.

3> $M > N$:

Momente: $\underline{X} \in \mathbb{C}^N$, $g(\underline{x}): \underline{x} \in \mathbb{C}^N \rightarrow g(\underline{x}) \in \mathbb{C}$

Erwartungswert: $E(g(\underline{X})) = \int_{\mathbb{R}^N} \cdots \int_{\mathbb{R}^N} g(\underline{x})\, f_{\underline{X}}(\underline{x})\,d\underline{x}$ $[E(\underline{g}(\underline{X})) = [E(g_{ij}(\underline{X}))]]$

*) linear $\rightarrow E(\sum_i c_i g_i(\underline{X})) = \sum_i c_i E(g(\underline{x}_i))$

*) $\underline{X}, \underline{Y}$ unabhängig $\rightarrow g(\underline{X}), h(\underline{Y})$ unabh.

$\rightarrow E(\underline{X}\underline{Y}) = E(\underline{X}) \cdot E(\underline{Y})$

Matrizen

$(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})^T = \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{B}}^T$; $(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})^H = \underline{\underline{B}}^H \cdot \underline{\underline{A}}^H$

$(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1}$

$\det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = \det \underline{\underline{A}} \cdot \det \underline{\underline{B}}$

$\det \underline{\underline{A}}^T = \det \underline{\underline{A}}$; $\det \underline{\underline{A}}^H = (\det \underline{\underline{A}})^*$

1. & 2. Momente

Erwartungsvektor: $E(\underline{X}) = \underline{\mu} = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix}$

Korrelationsmatrix: $\underline{\underline{R}} = E(\underline{X} \cdot \underline{X}^H) = E\left\{ \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} [X_1^* \dots X_N^*] \right\} = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & \vdots \\ \vdots & & \\ & \dots & r_{NN} \end{bmatrix}$

Kovarianzmatrix: $\underline{\underline{C}} = E\left[(\underline{X}-\underline{\mu})(\underline{X}-\underline{\mu})^H\right] = Cov(\underline{X}, \underline{X}) \qquad c_{ii} = \sigma_i^2$

Eigenschaften: *) $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{C}} + \underline{\mu}\underline{\mu}^H$ (bzw. $r_{ij} = c_{ij} + \mu_i \mu_j^H$
$r_{ii} = c_{ii} + |\mu_i|^2$)

*) $E(|X_i|^2) = \sigma_i^2 + |\mu_i|^2$

*) $\underline{\underline{R}}$ hermitisch, d.h. $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}^H$

*) $\underline{a}^H \underline{\underline{R}}\, \underline{a} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} r_{ij} a_i a_j^* \geq 0 \;\forall\, \underline{a}$

($\to \underline{\underline{R}}$ nicht negativ definit : $\underline{\underline{R}} > 0$)

Korrelationskoeff.: $\rho_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{cov(x_i, x_j)}{\sqrt{var(X_i) \cdot var(x_j)}}$ ... normierte Covarianz

*) $\rho_{ij} = 0 \;\to cor(x_i, x_j) = 0 \to$ unkorreliert

*) $\rho_{ij} \neq 0 \;\to$ " $\neq 0 \to$ korreliert

*) $\rho_{ij} = 1 \;\to$ " " $\to$ kohärent

$\underline{Q} = \underline{\underline{A}}\,\underline{z} + \underline{m}$

$\downarrow$

$\underline{\underline{C}}_Q = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{A}}^T$

$= (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{D}}^{1/2})(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{D}}^{1/2})^T$

$\left[D^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix} \right]$

Kreuzkorrelationsmatrix: $\underline{\underline{R}}_{XY} = E(\underline{X}\,\underline{Y}^H) \in (N \times M)$

Kreuzkovarianzmatrix: $\underline{\underline{C}}_{XY} = E\left((\underline{X} - E(\underline{X}))(\underline{Y} - E(\underline{Y}))^H\right) \in (N \times M)$

Eigenschaften: *) $R_{XY} = C_{XY} + \underline{\mu}_X \underline{\mu}_Y^H$

*) $R_{XY} = R_{XY}^H$

*) $\underline{X} = \underline{Y} \to R_{XX}$ = Autokorrelationsmatrix

C_{XX} = Autokovarianzmatrix

Unabh., Unkorreliert, orthogonal: $f_{XY}(\underline{x}, \underline{y}) = f_X(\underline{x}) \cdot f_Y(\underline{y}) \to$ unabhängig

$\underline{\underline{C}}_{XY} = \underline{\underline{R}}_{XY} - \underline{\mu}_X \underline{\mu}_Y^H = \underline{\underline{0}} \to$ unkorreliert

$Cov[X_i, X_j] = \sigma^2 \delta_{ij}$

$\underline{\underline{R}}_{XY} = \underline{\underline{0}} \to$ Orthogonal

*) unabhängig $\underset{X}{\leftrightarrows}$ unkorreliert

*) normalverteilt + unkorreliert → unabhängig

Charakteristische Fkt.: Def.: $\underline{\Phi}_{\underline{X}}(j\underline{\omega}) = E(e^{j\underline{\omega}^T\underline{X}}) = \int\dots\int e^{j\underline{\omega}^T\underline{x}} f_{\underline{X}}(\underline{x})d\underline{x}$

$f_{\underline{X}}(\underline{x}) ○—● \underline{\Phi}_{\underline{X}}(\underline{x})$ (Rücktrafo: $f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int\dots\int \underline{\Phi}_{\underline{X}}(j\underline{\omega})e^{-j\underline{\omega}^T\underline{x}}d\underline{\omega}$

Marginale charakt. Fkt.: $\underline{\Phi}_{X_1}(j\omega_1) = E(e^{j\omega_1 X_1}) = \underline{\Phi}_{\underline{X}}\left(j\begin{bmatrix}\omega_1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\right)$

Eigenschaften: *) Momententheorem: $E(X_1^{k_1},\dots,X_N^{k_N}) = \frac{1}{j^{\sum_i k_i}}\frac{\partial^{\sum k_i}}{\partial\omega_1^{k_1}\dots\partial\omega_N^{k_N}}\underline{\Phi}_{\underline{X}}(j\underline{\omega})\Big|_{\underline{\omega}=0}$

(4. Moment: $E(X_1X_2X_3X_4) = r_{12}r_{34} + r_{13}r_{24} + r_{14}r_{23} - 2\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$

*) X_1, X_2 unabhängig

$\rightarrow \underline{\Phi}_{\underline{X}}(j\underline{\omega}) = \underline{\Phi}_{X_1}(j\omega_1)\cdot\underline{\Phi}_{X_2}(j\omega_2)$

Zahlenfolgen: Konvergenz: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$: $\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)$, s.d. $|x_n - x| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0(\varepsilon)$

Zufallsfolge: Folge von ZV $X_n = X_n(\xi)$

*) Konvergenz überall: $\lim_{n\to\infty} X_n(\xi) = X(\xi)\ \forall\xi\in\Omega$

→ nicht praktisch, da zu streng

*) Konv. mit W'keit 1: $P(\xi: \lim_{n\to\infty} X_n(\xi) = X(\xi)) = 1$

*) K. in quadr. Mittel (i.q.M.): $\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^2) = 0$

*) K. in W'keit (i. Wk): $\lim_{n\to\infty} P(\xi: |X_n(\xi) - X(\xi)| > \varepsilon) = 0\quad\forall\varepsilon>0$

*) K. in Verteilung (i.V.): $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ [Bem.: X normalverteilt ↳ X_n asymptotisch normalverteilt]

Eig.: *) mit W'keit 1 + ∃ 2. Moment von X_n → i.q.M

*) i.q.M + $\sum_n E(|X_n - X|^2) < \infty$ → mit W'keit 1

*) i.q.M → in W'keit

*) i.Wk → i.V.

Grenzwertsatz von Moivre-Laplace:

$P(X=k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$

Zentraler Grenzwertsatz: geg. X_i unabhängig, $E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2$ (identisch verteilt)

$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow E(S_n) = n\mu$, $Var(S_n) = n\sigma^2$

def.: $Z_n := \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma} \xrightarrow{n\to\infty} N(0,1)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} F_{Z_n} = F_Z(z) \qquad Z \sim N(0,1)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = N(n\mu, n\sigma^2)$$

Für X_i kont. ZV.: $\lim_{n\to\infty} f_{Z_n}(z) = f_Z(z)$

Schwächere Version: *) X_i unabh., können unterschiedl. verteilt sein

*) $E(X_i) = \mu_i < \infty$, $Var(X_i) = \sigma_i^2 < \infty$

*) $E(|X_i - \mu_i|^3) < \infty$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{n\to\infty} N(\mu, \sigma^2) \text{ in Verteilung}$$

Stochastischer Prozess

Definition: *) stochastischer Prozess = stochast. Signal ($\hat{=}$ Schar von Zeitfkt.)

*) $X(t) = X(t, \xi)$: $\xi \in \Omega : \xi \rightarrow X(t,\xi) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$

*) $t = t_0$: $X(t_0, \xi)$ ist ZV

$\xi = \xi_0$: $X(t, \xi_0)$ ist determ. Zeitfkt. ("Pfad", "Realisierung", "Musterfkt")

Verteilungsfkt.: $F_{X(t_1)\dots X(t_k)}(x_1, \dots, x_k) = P(X(t_1) \le x_1, \dots, X(t_k) \le x_k)$

$= F_X(x_1 \dots x_k ; t_1 \dots t_k) = F_X(\underline{x}; \underline{t})$

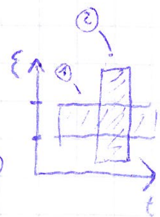
Dichtefkt.: $f_X(\underline{x}; \underline{t}) = \dfrac{\partial^k}{\partial x_1 \dots \partial x_k} F_X(\underline{x}; \underline{t})$

2 Sp.: $F_{XY}(\underline{x}, \underline{y}; \underline{t}, \underline{\tau})$

Momente

Zeitmittelwert: Mittelwert über t ①

Scharmittelwert: Mittelwert über $\xi \hat{=} E(\;)$ ②



1. Moment: determ. Anteil $\hat{=}$ Trend

$$\mu(t) = E(X(t)) = \int x f_X(x;t)\,dx$$

2. Moment: *) (Auto)Korrelationsfunktion (AKF)

$$r(t_1, t_2) = E[X(t_1) X^*(t_2)] = \iint x_1 x_2^* f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)\,dx_1 dx_2$$

$$r(t,t) = E[|X(t)|^2]$$

*) (Auto) Kovarianzfkt:

$$c(t_1,t_2) = Cov\left[X(t_1), X(t_2)\right]$$
$$= E\left\{\left[X(t_1)-\mu(t_1)\right]\left[X(t_2)-\mu(t_2)\right]^*\right\}$$

$$c(t,t) = E\left[|X(t)-\mu(t)|^2\right] = Var\left[X(t)\right] = \sigma^2(t)$$

*) Kreuzkorrelationsfunktion

$$r_{XY}(t_1,t_2) = E\left[X(t_1)\, Y^*(t_2)\right]$$

*) Kreuzkovarianzfunktion

$$c_{XY}(\tau) = E\left[\left(Y(t+\tau)-E\left[Y(t+\tau)\right]\right)\left(Y(t)-E\left[Y(t)\right]\right)\right]$$

$$C_{XY}(t_1,t_2) = Cov\left[X(t_1), Y(t_2)\right]$$

Eigenschaften

*) $r(t_1,t_2) = c(t_1,t_2) + \mu(t_1)\cdot\mu^*(t_2)$

$r_{XY}(t_1,t_2) = c_{XY}(t_1,t_2) + \mu_X(t_1)\,\mu_Y^*(t_2)$

*) $r(t_2,t_1) = r^*(t_1,t_2)$

$c(t_2,t_1) = c^*(t_1,t_2)$

Weißes Rauschen:

*) im engeren Sinne: $X(t_1)$ und $X(t_2)$ unabh. $\forall\, t_1 \neq t_2$

*) im weiteren Sinne: ״ unkorreliert $\forall\, t_1 \neq t_2$

zeitkontinuierlich: $c(t_1,t_2) = \sigma^2\,\delta(t_1-t_2)$

$Var(X(t)) = c(t,t) = \infty$

zeitdiskret: $c(n_1,n_2) = \sigma^2\,\delta(n_1-n_2)$

Stationarität

im engeren Sinne: $F_X(x_1,\dots,x_k;t_1,\dots,t_k) = F_X(\underline{x};t_1+t_0,\dots,t_k+t_0)$

$\forall\, k;\, t_1,\dots,t_k;\, t_0;\, x_1,\dots,x_k$

→ unabh. von d. Wahl d. Zeitursprungs

Eigenschaften: * $F_X(x;t) = F_X(x;t-t) = F_X(x)$

→ $\mu(t) = \mu = const.$

→ $\sigma^2(t) = \sigma^2 = const.$

* $F_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = F_X(x_1,x_2;t_1-t_2,t_2-t_2)$

$= F_X(x_1,x_2;\underset{t_1-t_2}{\underset{\shortparallel}{t}})$

→ $r(t_1,t_2) = r(t_1-t_2) = r(t)$

bzw. $r(t) = E[X(t+\tau)\,X^*(\tau)]$ (10)

$r(-t) = r^*(t)$

[analog für $c(t_1,t_2)$]

* $|r(t)| \le r(0)$

i.e.S. ⇄ im weiteren Sinne: 1) $\mu(t) = \mu = const.$

\+ Gauß-Prozess

2) $r(t_1,t_2) = r(t_1-t_2)$

Merkmale SP:

Stationarität (Zeitursprung)

Korrelation (Zeitabstand)

Verteilung (Amplituden)

Abtastung SP: $\underset{\text{analog}}{X_a}(t),\ \mu_a(t),\ r_a(t_1,t_2)$, $t_1,t_2,t \in \mathbb{R}$

↓

$X(n) := X_a(nT)$

↳ * $\mu(n) = E[X(n)] = \mu_a(nT)$

* $r(n_1,n_2) = r_a(n_1T, n_2T)$

* $X_a(t)$ i.e.S./i.w.S. stationär $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ $X(n)$ ...

* 〃 weiß $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ $X(n)$ ...

Spektrum

	zeitkont.	zeitdiskret
Leistungsspektrum, Spektrum, Spektrale Dichte	$R(\omega) = \mathcal{F}(r(t)),\ \omega \in \mathbb{R}$ $= \int_{-\infty}^{\infty} r(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$	$R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(n)\, e^{-j\omega n}$ $\quad -\pi \le \omega \le \pi$ "$R(\omega + 2\pi)$"
Kovarianzspektrum:	$C(\omega) = \mathcal{F}(c(t))$	$C(\omega) = \mathcal{F}(c(n))$
Kreuzspektrum	$R_{xy}(\omega) = \mathcal{F}(r_{xy}(t))$	$R_{xy}(\omega) = \mathcal{F}(r_{xy}(n))$
Kreuzkovarianzspektrum:	$C_{xy}(\omega) = \mathcal{F}(c_{xy}(t))$	$C_{xy}(\omega) = \mathcal{F}(c_{xy}(n))$

(gilt nur für stationäre Prozesse → Spektrum unabh. von d. Zeit)

Eigenschaften:

*) $R(\omega) = \lim_{T \to \infty} E\, \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^{T} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \right|^2 \ge 0$

*) $x(t) \in \mathbb{R}$: $r(t), c(t)$ gerade, reell

$\rightarrow R(\omega), C(\omega)$

*) $r(t) = \int_{\mathbb{R}} R(\omega)\, e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$ $\qquad r(0) = \int_{-\pi}^{\pi} R(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}$

… Gesamtleistung

$R(\omega), C(\omega)$ Leistungsdichtespektren ←

$c(0) = \int_{\mathbb{R}} C(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}$ … Wechselleistung

*) $r(t) = c(t) + |\mu|^2$ $\qquad r(n) = c(n) + |\mu|^2$

$R(\omega) = C(\omega) + |\mu|^2 \cdot 2\pi\, \delta(\omega)$ $\qquad R(\omega) = C(\omega) + |\mu|^2 \cdot 2\pi\, \eta(\omega)$

mit $\eta(\omega) = \sum_k \delta(\omega + 2\pi k)$

*) $r(n) = r_a(nT)$ → es gilt Abtasttheorem

Schätzungswerte:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x(n)$$

$$\hat{c}(n) = \begin{cases} \alpha(n) \sum_{m=1}^{N-n} [x(n+m) - \hat{\mu}][x(m) - \hat{\mu}] & n \ge 0 \\ \hat{c}(-n) & n < 0 \end{cases}$$

mit $\alpha(n) = \frac{1}{N}$ oder $\frac{1}{N-n}$

$$\hat{C}(\omega) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} \hat{c}(n)\, e^{-j\omega n}$$

Systemtheorie mit stoch. Prozessen

System: determ. System: Wenn $X(t, \xi_i) = X(t, \xi_j)$, dann
$Y(t, \xi_i) = Y(t, \xi_j)$

gedächtnislos (1), zeitinvariant (2): (1) $Y(t) = g(X(t), t)$
(2) $Y(t) = g(X(t))$

Eig.: *) $X(t)$ i.e.S. stationär $\rightarrow$ $Y(t)$ i.e.S. stationär

*) X i.w.S. stationär $\not\rightarrow$ $Y(t)$ i.w.S. Y

*) $\underline{x} = \begin{bmatrix} x(t_1) \\ \vdots \\ x(t_N) \end{bmatrix}$ $\quad Y = \begin{bmatrix} Y(t_1) \\ \vdots \\ Y(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(x(t_1)) \\ \vdots \\ g(x(t_N)) \end{bmatrix}$

$\rightarrow \underline{\underline{J}} = \begin{bmatrix} g'(x_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g'(x_N) \end{bmatrix}$

$f_Y(y) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} f_X(x_i)$

LTI: Faltung: $Y(t, \xi) = h(t) * X(t, \xi) \quad \forall \xi \in \Omega$

Faltung im quadr. Mittel: $\sum_i h(\tau_i) X(t - \tau_i, \xi) \cdot \Delta\tau_i \xrightarrow{\Delta\tau_i \to 0} Y(t, \xi)$

Eigenschaften: *) $X(t)$ i.e.S. (i.w.S.) stationär $\rightarrow$ $Y(t)$ ...

*) $X(t)$ Gauß-Prozess $\rightarrow$ $Y(t)$ ...

1. Moment *) $\mu_Y(t) = h(t) * \mu_X(t)$

(falls $X(t)$ stationär: $\mu_Y = H(0) \overset{\text{konst.}}{\mu_X}$

2. Momente *) $r_{YX}(t_1, t_2) = h(t_1) * r_{XX}(t_1, t_2)$ (F. über t_1)

*) $r_{XY}(t_1, t_2) = h^*(t_2) * r_{XX}$ (F. über t_2)

*) $r_{YY}(t_1, t_2) = h(t_1) * h^*(t_2) * r_{XX}(t_1, t_2)$

2. Momente f. stationäre Prozesse: *) $r_{YX}(t) = h(t) * r_{XX}(t)$

*) $r_{XY}(t) = h^*(-t) * r_{XX}(t)$

*) $r_{YY}(t) = h(t) * h^*(-t) * r_{XX}(t)$

*) $R_{YX}(\omega) = H(\omega) \cdot R_{XX}(\omega)$

$R_{XY}(\omega) = H^*(\omega) \cdot R_{XX}(\omega)$

$R_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot R_{XX}(\omega)$

f) Leistung: $E|Y(t)|^2 = r_{YY}(0)$

$$= \int_{\mathbb{R}} R_{YY}(w) \frac{dw}{2\pi}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |H(w)|^2 R_{XX}(w) \frac{dw}{2\pi}$$